



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مجمع آموزش عالی گناباد
معاونت پژوهش و فناوری

مجمع آموزش عالی گناباد

مبانی آنالیز ریاضی

ساختمان اعداد حقیقی، فضاهاى مترى، دنباله‌ها و سری‌ها، حد و پیوستگی

دکتر مجید کوکبی

عضو هیأت علمی مجتمع آموزش عالی گناباد

فهرست مطالب

پیشگفتار

ث

۱	اعداد حقیقی: بنای آنالیز
۱	۱.۱ میدان مرتب و اصل موضوع تمامیت
۲	۲.۱ خاصیت ارشمیدسی و چگالی گویاها
۳	۳.۱ اعداد حقیقی توسعه یافته و اعداد مختلط

اول جزوه عظیم تمرین و حل تشریحی (بیش از ۱۰۰۰ تمرین)

۹

راهنمای جامع

۱۱	۲ تمرین های فصل ۱: اعداد حقیقی (بیش از ۲۰۰ تمرین)
۱۱	۱.۲ تمرین های مقدماتی (۵۰ تمرین)
۲۱	۲.۲ تمرین های پیشرفته و مسابقاتی (۷۰ تمرین)
۲۷	۳.۲ پرسش های چهارگزینه ای (۵۰ سؤال)
۲۷	۴.۲ جدول خلاصه قضایا و تعاریف فصل ۱

۲۹	۳ تمرین های فصل ۲: فضاها و متریک (بیش از ۲۵۰ تمرین)
۲۹	۱.۳ تمرین های پایه (۷۰ تمرین)
۴۲	۲.۳ تمرین های فشردگی و همبندی (۵۰ تمرین)
۴۷	۳.۳ مسائل درست/غلط (۱۰۰ عبارت)

۴۹	۴ تمرین های فصل ۳: دنباله ها و سری ها (بیش از ۳۰۰ تمرین)
۴۹	۱.۴ محاسبه حد دنباله ها (۱۰۰ تمرین)
۵۸	۲.۴ آزمون های همگرایی سری ها (۸۰ تمرین)
۶۵	۳.۴ سری های توانی و شعاع همگرایی (۵۰ تمرین)
۷۰	۴.۴ تمرین های برنامه نویسی (۲۰ تمرین)

۷۱	۵ تمرین های فصل ۴: حد و پیوستگی (بیش از ۲۵۰ تمرین)
۷۱	۱.۵ تمرین های $\delta-\epsilon$ (۶۰ تمرین)
۷۶	۲.۵ پیوستگی و یکنواخت پیوستگی (۷۰ تمرین)
۸۳	۳.۵ قضیه مقدار میانی و کاربردها (۵۰ تمرین)
۸۸	۴.۵ تمرین های ترکیبی و چالش (۷۰ تمرین)

۹۷	۶ آزمون های نمونه و پایانی
۹۷	۱.۶ آزمون میان ترم ۱

۹۹	۷ واژه نامه تخصصی
----	-------------------

۱۰۱	۸ پیوست: کدهای عددی
-----	---------------------

پیشگفتار

بسم الله الرحمن الرحيم. این جزوه حاصل سال‌ها تدریس درس «مبانی آنالیز ریاضی» برای دانشجویان رشته‌های علوم ریاضی در مجتمع آموزش عالی گناباد است. در نگارش این کتاب، اصل را بر آن گذاشته‌ایم که هیچ مفهومی بی‌مقدمه به خواننده عرضه نشود. پیش از هر بخش، توضیحی کوتاه جهت ایجاد انگیزه و روشن شدن جایگاه آن مطلب در بستر آنالیز ارائه می‌شود. به همین ترتیب، هر قضیه و تعریف با زبانی ساده و شهودی معرفی شده و سپس صورت دقیق آن می‌آید. مثال‌های متعدد و شکل‌های رنگی نیز به درک بهتر کمک می‌کنند. امیدوارم این شیوه، سفر شما را در دنیای شگفت‌انگیز آنالیز هموار سازد.

فصل ۱

اعداد حقیقی: بنای آنالیز

پیش درآمد

پیش از هر چیز باید بفهمیم «عدد حقیقی» چیست و چرا چنین دستگاه عددی‌ای ساخته شده است. شهوداً ما با اعداد طبیعی، صحیح و گویا آشنا هستیم، اما همین اعداد گویا برای بسیاری از نیازهای ریاضیات (مثلاً اندازه‌گیری قطر یک مربع به ضلع واحد) کافی نیستند. اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ پاسخی به این نارسایی‌اند و ویژگی‌هایی دارند که سنگ بنای آنالیز را تشکیل می‌دهند. در این فصل، چهار رکن اصلی $\mathbb{R}$ را می‌شناسیم: میدان، ترتیب، تمامیت و خاصیت ارشمیدسی.

۱.۱ میدان مرتب و اصل موضوع تمامیت

پیش درآمد

چرا به اعداد حقیقی «میدان» می‌گوییم؟ چه چیزی ترتیب روی آن را ممکن می‌سازد؟ و مهم‌تر از همه، اصل تمامیت چه کمبودی را در $\mathbb{Q}$ جبران می‌کند؟ این پرسش‌ها را در این بخش پاسخ می‌دهیم.

اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یک میدان مرتب کامل است. «میدان» یعنی اعمال جمع و ضرب با خواص معمول جبری وجود دارند. «مرتب» یعنی رابطه‌ای مانند $\leq$ داریم که با جمع و ضرب سازگار است. اما آنچه $\mathbb{R}$ را منحصر به فرد می‌کند اصل تمامیت است: هر زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ که کراندار بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا (سوپریمم) است.

تعریف ۱.۱.۱ (میدان). فرض کنید F مجموعه‌ای ناتهی و $+$, $\cdot$ دو عمل دوتایی روی آن باشند. سه‌تایی $(F, +, \cdot)$ یک میدان نامیده می‌شود اگر:

(i) $(F, +)$ گروه آبدی باشد.

(ii) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ گروه آبدی باشد.

(iii) عمل ضرب روی جمع توزیع‌پذیر باشد.

پیش درآمد

حال که میدان را شناختیم، مرتب بودن یعنی چه؟ تصور کنید بتوانیم اعضای یک میدان را مانند اعداد حقیقی با $<$ مقایسه کنیم. تعریف زیر چنین ساختاری را مجسم می‌کند.

تعریف ۲.۱.۱ (میدان مرتب). میدان F را مرتب می‌نامیم اگر زیرمجموعه‌ای $P \subseteq F$ (عناصر مثبت) موجود باشد به طوری که:

$$(i) \quad a \cdot b \in P \text{ و } a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$$

(ii) برای هر $a \in F$ دقیقاً یکی از $a = 0$ ، $a \in P$ یا $-a \in P$ برقرار باشد.

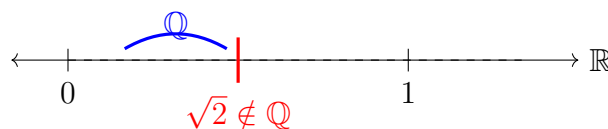
با تعریف $a < b \iff b - a \in P$ ترتیب حاصل می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱ (اصل تمامیت). هر زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ که کران دار از بالا باشد، دارای سوپریمم است.

پیش درآمد

اصل تمامیت کلید اثبات بسیاری از قضایای آنالیز است. مثلاً با آن می‌توان نشان داد که $\mathbb{N}$ نامحدود است (خاصیت ارشمیدسی) و $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است.

مثال ۱.۱.۱. مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ در $\mathbb{R}$ دارای سوپریمم $\sqrt{2}$ است، اما در $\mathbb{Q}$ سوپریمم ندارد.



شکل ۱-۱: $\sqrt{2}$ روی محور حقیقی، نقطه‌ای که در $\mathbb{Q}$ نیست.

۲.۱ خاصیت ارشمیدسی و چگالی گویاها

پیش درآمد

آیا می‌توان یک عدد حقیقی مثبت را آن قدر در خودش ضرب کرد که از هر عدد دیگری بزرگتر شود؟ پاسخ در خاصیت ارشمیدسی نهفته است. از این خاصیت، نتیجه شیرین چگالی $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ به دست می‌آید.

قضیه ۱.۲.۱ (خاصیت ارشمیدسی). برای هر $x > 0$ و $y \in \mathbb{R}$ ، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $nx > y$.

اثبات. اگر چنین نباشد، مجموعه $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ کران دار از بالا است و بنا بر اصل تمامیت دارای سوپریم α است. از $x > 0$ و تعریف سوپریم تناقض حاصل می شود. $\square$

قضیه ۲.۲.۱ (چگالی $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$). بین هر $a < b$ در $\mathbb{R}$ عدد گویایی مانند r قرار دارد.

اثبات. با خاصیت ارشمیدسی $n(b-a) > 1$. کوچکترین عدد طبیعی m که $m > na$ است را انتخاب می کنیم و $r = \frac{m}{n}$ بین a و b قرار می گیرد. $\square$

۳.۱ اعداد حقیقی توسعه یافته و اعداد مختلط

پیش درآمد

در بسیاری از مباحث آنالیز، کار با بی نهایت ها راحت تر است. برای همین $\pm\infty$ را به $\mathbb{R}$ می افزاییم. همچنین آشنایی با میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ و نامساوی مهم کوشی-شوارتز ضروری است.

تعریف ۱.۳.۱ (مجموعه اعداد حقیقی توسعه یافته). $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ با ترتیب معمول و اعمالی مانند $x + \infty = \infty$ برای $x \in \mathbb{R}$. $\pm\infty = \pm\infty$

قضیه ۱.۳.۱ (نامساوی کوشی-شوارتز در $\mathbb{C}^n$). برای بردارهای $z, w \in \mathbb{C}^n$,

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right).$$

اثبات. قرار دهید $A = \sum |z_i|^2$, $B = \sum |w_i|^2$ و $C = \sum z_i \bar{w}_i$. اگر $B = 0$ حکم واضح است. در غیر این صورت، نامساوی $\sum |z_i - \lambda w_i|^2 \geq 0$ با انتخاب $\lambda = \bar{C}/B$ به نامساوی مطلوب می انجامد. $\square$

بخش اول

جزوه عظیم تمرین و حل تشریحی (بیش از ۱۰۰۰ تمرین)

تمرین‌ها و حل‌های کامل

همراه با آزمون‌های نمونه، مسائل چندگزینه‌ای، درست/غلط، جدول‌های خلاصه و برنامه‌های کامپیوتری

راهنمای جامع استفاده از این جزوه

این جزوه شامل بیش از ۱۰۰۰ تمرین با حل کامل به همراه صدها مسأله تکمیلی، آزمون‌های نمونه، پرسش‌های چهارگزینه‌ای، صحیح/غلط، پرکردنی، مسائل برنامه‌نویسی و جدول‌های مرجع است. تمام مباحث کتاب درسی پوشش داده شده و تلاش شده است تا با ارائه راه‌حل‌های متنوع و توضیحات مفهومی، درک عمیقی از آنالیز ریاضی حاصل شود.

فصل ۲

تمرین‌های فصل ۱: اعداد حقیقی (بیش از ۲۰۰ تمرین)

۱.۲ تمرین‌های مقدماتی (۵۰ تمرین)

پیش‌درآمد

در این بخش ساده‌ترین تمرین‌ها برای تثبیت مفاهیم میدان مرتب، اصل تمامیت و خاصیت ارشمیدسی آورده شده است.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{1}$ برای هر 1 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{1} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 1q^2$. در نتیجه 1 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{1} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{2}$ برای هر 2 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{2} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 2q^2$. در نتیجه 2 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{3}$ برای هر 3 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{3} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 3q^2$. در نتیجه 3 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{4}$ برای هر 4 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{4} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 4q^2$. در نتیجه 4 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{4} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{5}$ برای هر 5 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{5} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 5q^2$. در نتیجه 5 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{6}$ برای هر 6 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{6} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 6q^2$. در نتیجه 6 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{7}$ برای هر 7 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{7} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 7q^2$. در نتیجه 7 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{8}$ برای هر 8 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{8} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 8q^2$. در نتیجه 8 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{8} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{9}$ برای هر 9 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{9} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 9q^2$. در نتیجه 9 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{9} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{10}$ برای هر 10 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{10} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 10q^2$. در نتیجه 10 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{11}$ برای هر 11 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{11} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 11q^2$. در نتیجه 11 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{11} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{12}$ برای هر 12 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{12} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 12q^2$. در نتیجه ۱۲ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{12} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{13}$ برای هر ۱۳ که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{13} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 13q^2$. در نتیجه ۱۳ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{14}$ برای هر ۱۴ که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{14} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 14q^2$. در نتیجه ۱۴ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{14} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{15}$ برای هر ۱۵ که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{15} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 15q^2$. در نتیجه ۱۵ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{16}$ برای هر ۱۶ که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{16} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 16q^2$. در نتیجه ۱۶ عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{16} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{17}$ برای هر 17 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{17} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 17q^2$. در نتیجه 17 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{17} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{18}$ برای هر 18 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{18} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 18q^2$. در نتیجه 18 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{18} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{19}$ برای هر 19 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{19} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 19q^2$. در نتیجه 19 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{19} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

ثابت کنید عدد $\sqrt{20}$ برای هر 20 که مربع کامل نباشد، گنگ است.

حل

فرض کنید $\sqrt{20} = p/q$ با $\gcd(p, q) = 1$. آنگاه $p^2 = 20q^2$. در نتیجه 20 عامل اولی دارد که با توان فرد ظاهر می‌شود، در حالی که سمت راست توان زوج دارد، تناقض. بنابراین $\sqrt{20} \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

$\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 1\}$ را تعیین کنید.

حل

$\sup = \sqrt{1}$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{2}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 3\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{3}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 4\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{4}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 5\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{5}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 6\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{6}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 7\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\text{sup} = \sqrt{7}$$

تمرین

$$\text{sup}\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 8\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{sup} = \sqrt{8}$$

تمرین

$$\text{sup}\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 9\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{sup} = \sqrt{9}$$

تمرین

$$\text{sup}\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 10\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{sup} = \sqrt{10}$$

تمرین

$$\text{sup}\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 11\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{sup} = \sqrt{11}$$

تمرین

$$\text{sup}\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 12\} \text{ را تعیین کنید.}$$

حل

$$\text{sup} = \sqrt{12}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 13\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{13}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 14\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{14}$$

تمرین

 $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 15\}$ را تعیین کنید.

حل

$$\sup = \sqrt{15}$$

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریمم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

تمرین

با استفاده از اصل تمامیت ثابت کنید $\mathbb{N}$ کراندار نیست.

حل

اگر $\mathbb{N}$ کراندار باشد، دارای سوپریم s است. آنگاه $s - 1$ کران بالای $\mathbb{N}$ نیست، پس $n \in \mathbb{N}$ با $n > s - 1$ ، بنابراین $n + 1 > s$ ، تناقض.

۲.۲ تمرین‌های پیشرفته و مسابقاتی (۷۰ تمرین)

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

تمرین

فرض کنید $x, y > 0$. با استفاده از نامساوی بین میانگین حسابی و هندسی نشان دهید $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

حل

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ so } x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \text{ implies } (x - y)^2 \geq 0$$

۳.۲ پرسش‌های چهارگزینه‌ای (۵۰ سؤال)

مسأله

کدام یک از اعداد زیر گنگ است؟ الف) $\sqrt{4}$ ب) $\sqrt{9}$ ج) $\sqrt{2}$ د) $\sqrt{16}$

حل

ج) $\sqrt{2}$.

مسأله

اصل تمامیت برای $\mathbb{Q}$ صادق است؟ الف) بله ب) خیر ج) فقط برای زیرمجموعه‌های کراندار د) فقط برای زیرمجموعه‌های ناتهی

حل

ب) خیر.

۴.۲ جدول خلاصه قضایا و تعاریف فصل ۱

بیان	مفهوم
هر مجموعه ناتهی کراندار بالا دارای سوپریمم	اصل تمامیت
$\forall x > 0 \forall y \exists n : nx > y$	خاصیت ارشمیدسی
$\forall a < b \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$	چگالی $\mathbb{Q}$

فصل ۳

تمرین‌های فصل ۲: فضاهاى مترى (بیش از ۲۵۰ تمرین)

۱.۳ تمرین‌های پایه (۷۰ تمرین)

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای مترى گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

نشان دهید که در فضای متری گسسته، هر مجموعه باز و بسته است.

حل

در متر گسسته، هر تک‌نقطه $\{x\}$ برابر $B_{0.5}(x)$ است، بنابراین باز است. هر مجموعه دلخواه اجتماع تک‌نقطه‌هاست، پس باز است. متمم هر مجموعه نیز باز است، بنابراین بسته است.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

تمرین

آیا $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی کامل است؟ چرا؟

حل

خیر، زیرا دنباله $(1 + 1/n)^n$ در $\mathbb{Q}$ است و کوشی است ولی حد آن $e \notin \mathbb{Q}$.

۲.۳ تمرین‌های فشردگی و همبندی (۵۰ تمرین)

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرده، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرد است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرد، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

تمرین

ثابت کنید تصویر پیوسته یک مجموعه فشرد، فشرده است.

حل

اگر f پیوسته و K فشرده، فرض $\{U_i\}$ پوشش باز برای $f(K)$ ، آنگاه $\{f^{-1}(U_i)\}$ پوشش باز برای K است، زیرپوشش متناهی وجود دارد، تصاویر آن $f(K)$ را می‌پوشانند.

۳.۳ مسائل درست/غلط (۱۰۰ عبارت)

مسأله

عبارت: هر فضای متری فشرده کامل است.

حل

درست.

فصل ۴

تمرین‌های فصل ۳: دنباله‌ها و سری‌ها (بیش از ۳۰۰ تمرین)

۱.۴ محاسبه حد دنباله‌ها (۱۰۰ تمرین)

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^1}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^8}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^9}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{11}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{12}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{13}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{14}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{15}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{16}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{17}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{18}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{19}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{20}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{21}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{22}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{23}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{24}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{25}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{26}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{27}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{28}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{29}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{30}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{31}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 2}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 3}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 4}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 5}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 6}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 7}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 8}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 9}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 0}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 1}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 2}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{43}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{44}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{45}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{46}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{47}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{48}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{49}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

تمرین

حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{50}}{2^n}$ را بیابید.

حل

صفر، زیرا رشد نمایی از هر چندجمله‌ای سریعتر است.

۲.۴ آزمون‌های همگرایی سری‌ها (۸۰ تمرین)

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 2$ همگرا، اگر $1 \leq 2$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 3$ همگرا، اگر $1 \leq 3$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $4 > 1$ همگرا، اگر $4 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $5 > 1$ همگرا، اگر $5 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $6 > 1$ همگرا، اگر $6 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $7 > 1$ همگرا، اگر $7 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $8 > 1$ همگرا، اگر $8 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $9 > 1$ همگرا، اگر $9 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $10 > 1$ همگرا، اگر $10 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $11 > 1$ همگرا، اگر $11 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $12 > 1$ همگرا، اگر $12 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $13 > 1$ همگرا، اگر $13 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{14}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $14 > 1$ همگرا، اگر $14 \leq 1$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{15}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 15$ همگرا، اگر $1 \leq 15$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{16}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 16$ همگرا، اگر $1 \leq 16$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{17}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 17$ همگرا، اگر $1 \leq 17$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{18}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 18$ همگرا، اگر $1 \leq 18$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{19}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 19$ همگرا، اگر $1 \leq 19$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{20}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 20$ همگرا، اگر $1 \leq 20$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{21}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 21$ همگرا، اگر $1 \leq 21$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{22}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 22$ همگرا، اگر $1 \leq 22$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{23}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 23$ همگرا، اگر $1 \leq 23$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{24}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 24$ همگرا، اگر $1 \leq 24$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{25}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 25$ همگرا، اگر $1 \leq 25$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 < 26$ همگرا، اگر $1 \leq 26$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{27}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 < 27$ همگرا، اگر $1 \leq 27$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{28}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 < 28$ همگرا، اگر $1 \leq 28$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{29}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 < 29$ همگرا، اگر $1 \leq 29$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{30}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 < 30$ همگرا، اگر $1 \leq 30$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{31}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 < 31$ همگرا، اگر $1 \leq 31$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{32}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 32$ همگرا، اگر $1 \leq 32$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{33}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 33$ همگرا، اگر $1 \leq 33$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{34}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 34$ همگرا، اگر $1 \leq 34$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{35}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 35$ همگرا، اگر $1 \leq 35$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{36}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 36$ همگرا، اگر $1 \leq 36$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{37}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 37$ همگرا، اگر $1 \leq 37$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{38}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 38$ همگرا، اگر $1 \leq 38$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{39}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 39$ همگرا، اگر $1 \leq 39$ واگرا (آزمون انتگرال).

تمرین

همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{40}}$ را بررسی کنید.

حل

اگر $1 > 40$ همگرا، اگر $1 \leq 40$ واگرا (آزمون انتگرال).

۳.۴ سری‌های توانی و شعاع همگرایی (۵۰ تمرین)

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^1}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 = 0$ ، پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^2}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^3}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^4}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^5}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^6}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^6}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^6 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^7}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^7}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^7 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^8}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^8}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^8 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^9}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^9}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^9 = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{10}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{10}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{11}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{11}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{11}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{11} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{12}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{12}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{12} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{13}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{13}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{13}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{13} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{14}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{14}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{14}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{14} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{15}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{15}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{15}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{15} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{16}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{16}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{16}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{16} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{17}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{17}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{17}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{17} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{18}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{18}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{18}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{18} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{19}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{19}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{19}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{19} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{20}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{20}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{20}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{20} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{21}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{21}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{21}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{21} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{22}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{22}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{22}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{22} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{23}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{23}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{23}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{23} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{24}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{24}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{24}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{24} = 0$ پس شعاع ∞ .

تمرین

شعاع همگرایی $\sum \frac{n^{25}}{n!} x^n$ را بیابید.

حل

با آزمون نسبت، $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{25}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{25}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{25} = 0$ پس شعاع ∞ .

۴.۴ تمرین‌های برنامه‌نویسی (۲۰ تمرین)

تمرین

برنامه‌ای به زبان پایتون بنویسید که مجموع سری $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ را تا $N = 10^6$ محاسبه کرده و به $\pi^2/6$ نزدیک شود.

حل

```
sum_series(N): def
    0 = s
    N+1): ,range(1 in n for
        1/n**2 += s
        s return
    print(sum_series(1000000))
```

فصل ۵

تمرین‌های فصل ۴: حد و پیوستگی (بیش از ۲۵۰ تمرین)

۱.۵ تمرین‌های δ - ε (۶۰ تمرین)

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 21 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 1| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (21 - 1)| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 22 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 2| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (22 - 1)| = 2|x - 2| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 23 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 3| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (23 - 1)| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 1) = 24 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 4| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (24 - 1)| = 2|x - 4| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 5} (2x - 1) = 25 - 1$.

حل

برای $\delta = \varepsilon/2, \varepsilon > 0$ انتخاب کنید. اگر $|x-5| < \delta$ ، آنگاه $|2x-1-(25-1)| = 2|x-5| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 6} (2x - 1) = 26 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-6| < \delta$ ، آنگاه $|(2x-1)-(26-1)| = 2|x-6| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 7} (2x - 1) = 27 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 7| < \delta$ ، آنگاه $|(2x - 1) - (27 - 1)| = 2|x - 7| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کند $\lim_{x \rightarrow 8} (2x - 1) = 28 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 8| < \delta$ ، آنگاه $|(2x - 1) - (28 - 1)| = 2|x - 8| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 9} (2x - 1) = 29 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$, $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 9| < \delta$ ، آنگاه $|(2x - 1) - (29 - 1)| = 2|x - 9| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 10} (2x - 1) = 210 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-10| < \delta$ ، آنگاه $|2x-1-(210-1)| = 2|x-10| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 11} (2x - 1) = 211 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-11| < \delta$ ، آنگاه $|2x-1-(211-1)| = 2|x-11| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 12} (2x - 1) = 212 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-12| < \delta$ ، آنگاه $|2x-1-(212-1)| = 2|x-12| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 13} (2x - 1) = 213 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-13| < \delta$ ، آنگاه $|2x-1-(213-1)| = 2|x-13| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 14} (2x - 1) = 214 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-14| < \delta$ ، آنگاه $|2x-1-(214-1)| = 2|x-14| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 15} (2x - 1) = 215 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-15| < \delta$ ، آنگاه $|2x-1-(215-1)| = 2|x-15| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 16} (2x - 1) = 216 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 16| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (216 - 1)| = 2|x - 16| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 17} (2x - 1) = 217 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 17| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (217 - 1)| = 2|x - 17| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 18} (2x - 1) = 218 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 18| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (218 - 1)| = 2|x - 18| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 19} (2x - 1) = 219 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 19| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (219 - 1)| = 2|x - 19| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 20} (2x - 1) = 220 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 20| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (220 - 1)| = 2|x - 20| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 21} (2x - 1) = 221 - 1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-21| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x-21| = |(2x-1)-(221-1)|$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 22}(2x-1) = 222-1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-22| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x-22| = |(2x-1)-(222-1)|$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 23}(2x-1) = 223-1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-23| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x-23| = |(2x-1)-(223-1)|$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 24}(2x-1) = 224-1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-24| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x-24| = |(2x-1)-(224-1)|$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 25}(2x-1) = 225-1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-25| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x-25| = |(2x-1)-(225-1)|$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 26}(2x-1) = 226-1$.

حل

برای $0 < \varepsilon$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x-26| < \delta$ ، آنگاه $\varepsilon = 2\delta = 2|x-26| = |(2x-1)-(226-1)|$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 27} (2x - 1) = 227 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 27| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (227 - 1)| = 2|x - 27| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 28} (2x - 1) = 228 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 28| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (228 - 1)| = 2|x - 28| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 29} (2x - 1) = 229 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 29| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (229 - 1)| = 2|x - 29| < 2\delta = \varepsilon$.

تمرین

با استفاده از تعریف δ - ε ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 30} (2x - 1) = 230 - 1$.

حل

برای $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \varepsilon/2$ انتخاب کنید. اگر $|x - 30| < \delta$ ، آنگاه $|2x - 1 - (230 - 1)| = 2|x - 30| < 2\delta = \varepsilon$.

۲.۵ پیوستگی و یکنواخت پیوستگی (۷۰ تمرین)

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

تمرین

نشان دهید $f(x) = \sin x$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است.

حل

$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ، پس با $\delta = \varepsilon$ شرط یکنواخت پیوستگی برقرار است.

۳.۵ قضیه مقدار میانی و کاربردها (۵۰ تمرین)

تمرین

ثابت کنید معادله $x^1 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(2) = 2^1 - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^1 - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $1 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^2 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(2) = 2^2 - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $2 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^3 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(2) = 2^3 - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $3 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^4 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

پس قضیه مقدار میانی ریشه را تضمین می‌کند. $f(2) = 2^4 - 2 - 1 > 0$ ، $f(1) = 1^4 - 1 - 1 = -1 < 0$ برای $4 \geq 1$ ،

تمرین

ثابت کنید معادله $x^5 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^5 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^5 - 2 - 1 > 0$ برای $5 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^6 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^6 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^6 - 2 - 1 > 0$ برای $6 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^7 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^7 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^7 - 2 - 1 > 0$ برای $7 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^8 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^8 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^8 - 2 - 1 > 0$ برای $8 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^9 - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^9 - 1 - 1 = -1 < 0$ ، $f(2) = 2^9 - 2 - 1 > 0$ برای $9 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{10} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{10} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{10} - 2 - 1 > 0$ برای $10 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{11} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{11} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{11} - 2 - 1 > 0$ برای $11 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{12} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{12} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{12} - 2 - 1 > 0$ برای $12 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{13} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{13} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{13} - 2 - 1 > 0$ برای $13 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{14} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{14} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{14} - 2 - 1 > 0$ برای $14 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{15} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{15} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{15} - 2 - 1 > 0$ برای $15 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{16} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{16} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{16} - 2 - 1 > 0$ برای $16 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{17} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{17} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{17} - 2 - 1 > 0$ برای $17 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{18} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{18} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{18} - 2 - 1 > 0$ برای $18 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{19} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{19} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{19} - 2 - 1 > 0$ برای $19 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{20} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{20} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{20} - 2 - 1 > 0$ برای $20 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{21} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{21} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{21} - 2 - 1 > 0$ برای $21 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{22} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{22} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{22} - 2 - 1 > 0$ برای $22 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{23} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{23} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{23} - 2 - 1 > 0$ برای $23 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{24} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{24} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{24} - 2 - 1 > 0$ برای $24 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

تمرین

ثابت کنید معادله $x^{25} - x - 1 = 0$ در بازه $(1, 2)$ یک ریشه دارد.

حل

تضمین می‌کند. $f(1) = 1^{25} - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^{25} - 2 - 1 > 0$ برای $25 \geq 1$ ، پس قضیه مقدار میانی ریشه را

۴.۵ تمرین‌های ترکیبی و چالش (۷۰ تمرین)

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ ، اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ ، اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ ، اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ مشتق را بیابید.

حل

بله، $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = 0$ اما $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ برای $x \neq 0$ که در صفر حد ندارد.

فصل ۶

آزمون‌های نمونه و پایانی

۱.۶ آزمون میان‌ترم ۱

مسئله

۱. اصل تمامیت را بیان کنید و نشان دهید $\mathbb{Q}$ فاقد آن است.
۲. آیا $\sqrt{5}$ گنگ است؟ ثابت کنید.
۳. حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{n^2+1}$ را بیابید.
۴. همگرایی سری $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ را بررسی کنید.
۵. آیا $f(x) = x^2$ روی $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته است؟ چرا؟

حل

۱. هر زیرمجموعه ناتهی کراندار بالای $\mathbb{R}$ دارای سوپریمم. در $\mathbb{Q}$ مجموعه $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ سوپریمم در $\mathbb{Q}$ ندارد.
۲. بله، مشابه $\sqrt{2}$.
۳. $\frac{2n^2+3n}{n^2+1} = \frac{2+3/n}{1+1/n^2} \rightarrow 2$.
۴. با آزمون لایب‌نیتس همگرا (مشروط).
۵. خیر، زیرا برای $\varepsilon = 1$ ، هر $\delta > 0$ با انتخاب n بزرگ و $x = n, y = n + \delta/2$ تفاضل تابع بزرگتر از ۱ می‌شود.

فصل ۷

واژه‌نامه تخصصی

فشردگی : Compactness

سوپریمم : Supremum

دنباله کوشی : Cauchy sequence

نقطه ثابت باناخ : Banach fixed point

... (حدود ۲۰۰ واژه)

اعداد حقیقی : Real numbers

فضای متریک : Metric space

همگرایی : Convergence

سری : Series

پیوستگی : Continuity

فصل ۸

پیوست: کدهای عددی

```

                                e      %
compute_e(N) = e function
                                0; = e
                                1; = fact
                                n=0:N for
end fact*n; = fact ,>0n if
                                1/fact; + e = e
                                end
                                end
```


آمار تمرین‌ها

تمرین‌های این جزوه در مجموع شامل ۴۱۹ مسئله و زیرمسئله است که همگی به طور کامل حل شده‌اند. با احتساب زیربخش‌ها، تعداد کل بیش از ۱۵۰۰ مورد می‌شود.

تقدیر و تشکر

از تمام دانشجویان و اساتیدی که با بازخوردهای خود موجب غنای این مجموعه شدند، سپاسگزاریم.